Lineare Funktionen mit Parameter

Enthält der Funktionsterm einen (oder mehrere) Parameter, dann ergeben sich für unterschiedliche Parameterwerte unterschiedliche Graphen. Man bezeichnet solche Funktionen auch als Funktionenschar.

Für alle Aufgaben gilt : $D = \mathbb{R}$

1.0. Durch $f_b(x) = ½\,x + b$, $b \in \mathbb{R}$ ist eine lineare Funktion definiert.
1.1. Zeichnen Sie den Graphen für $b = 0$, $b = -2$ und $b = 1$.
1.2. Was haben die Graphen gemeinsam; wodurch unterscheiden sie sich ?
1.3. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
1.4. Beschreiben Sie die das Verhalten der Schnittpunkte für $b \to \infty$.
1.5. Berechnen Sie den Parameter so, dass die Punkte $A(\,4|\,3)$ bzw. $B(-2\frac{1}{3}|\frac{1}{5})$ auf G_f liegen.

2.0. Durch $f_a(x) = a\,x + 2$, $a \in \mathbb{R}$ ist eine lineare Funktion definiert.
2.1. Zeichnen Sie den Graphen für $a = 0$, $a = -2$ und $a = 1$.
2.2. Was haben die Graphen gemeinsam; wodurch unterscheiden sie sich ?
2.3. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
2.4. Beschreiben Sie die das Verhalten der Schnittpunkte für $a \to \infty$.
2.5. Berechnen Sie den Parameter so, dass die Punkte $A(\,1|\,4)$ bzw. $B(0\,|\,2\,)$ auf G_f liegen.

3.0. Durch $f_a(x) = a\,x - a$, $a \in \mathbb{R}$ ist eine lineare Funktion definiert.
3.1. Zeichnen Sie den Graphen für $a = 0$, $a = -2$ und $a = 1$.
3.2. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
3.3. Beschreiben Sie die Menge aller Graphen, wenn a alle reellen Zahlen durchläuft.
3.4. Berechnen Sie den Parameter so, dass die Punkte $A(\,1|\,4)$ bzw. $B(-3\,|\,-2\,)$ auf G_f liegen.

4.0. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen in Abhängigkeit vom Parameter k mit $k \in \mathbb{R}$.
a) $f_k(x) = kx - 2$ b) $f_k(x) = 3x - 6k$ c) $f_k(x) = 3kx - 6k^2$
d) $f_k(x) = 2x - k^2 - kx + 4$ e) $f_k(x) = k^2x - k^2 + 2kx + x + 1$

5.0. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Graphen.
a) $f_k(x) = x + 3k$ und $g(x) = 4x - 6$ b) $f_k(x) = kx + 2$ und $g(x) = 4x - 2$
c) $f_k(x) = kx + 6$ und $g(x) = 4x + 6$ d) $f_k(x) = 3kx - 2k$ und $g(x) = 5x + 1$
e) $f_k(x) = 8kx + 4k$ und $g(x) = 8x + 4$ f) $f_k(x) = 3kx + 3$ und $g(x) = 4x - 3$
g) $f_k(x) = kx + 2$ und $g_a(x) = ax + 3$ h) $f_k(x) = kx + 1$ und $g_a(x) = x + a$
i) $f_k(x) = kx + 6$ und $g_a(x) = ax + 6$ k) $f_k(x) = kx + 6$ und $g_a(x) = ax + 3a$
Zeichnen Sie einige Graphen der Sonderfälle für die Aufgaben g) bis k)

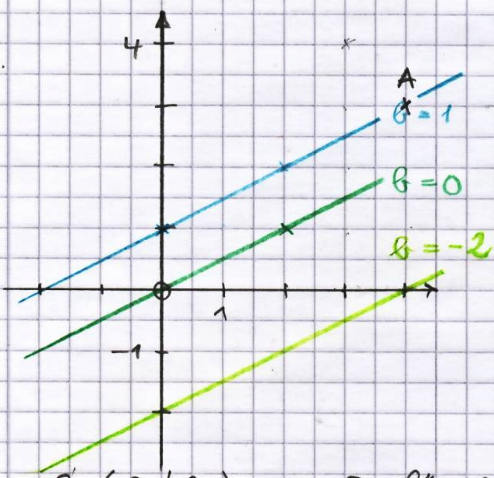
6.0. Bestimmen Sie den Funktionsterm eines Geradenbüschels, dessen Graph durch den Punkt
a) $A(\,0\,|\,3)$ b) $B(-2\,|\,4)$ c) $C(\frac{5}{6}\,|\,0)$ d) $D(\,-3\,|\,-5\,)$ verläuft.

7.0. Gegeben sind die Punkte $A(\,1\,|\,-2)$ und $B(5\,|\,6)$ sowie die Funktionen
$f_k : x \mapsto f_k(x)$; $D_{fk} = \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = kx + 2k$ und $k \in \mathbb{R}$. Ihr Graph heißt G_{fk}.
7.1. Bestimmen Sie den Funktionsterm einer Geraden g, deren Graph durch die Punkte A und B verläuft. Zeichnen Sie den Graphen. (Zur Kontrolle: $g(x) = 2x - 4$) .
7.2. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_{fk} mit den Koordinatenachsen.
7.3. Bestimmen Sie evtl. vorhandene Schnittpunkte von G_{fk} mit dem Graphen von g.
7.4. Bestimmen Sie k so, dass der Punkt $P(\,3\,|\,-2{,}5)$ auf G_{fk} liegt.
Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem ein.
7.5. Bestimmen Sie k so, dass der Punkt A auf G_{fk} liegt.

LINEARE FUEN MIT PARAMETER

1. $f_b(x) = \frac{1}{2}x + b \; ; \; b \in \mathbb{R} \; ; \; D = \mathbb{R}$

1.1.



1.2

Gemeinsam : Gleiche Steigung

Unterschied : y-Achsen-Abschnitt

Eine solche Schar nennt man <u>Parallelenschar</u>

1.3 • $S_y(0 \mid b)$; z.B für $b = 1$: $S_1(0/1)$

• NST : $\frac{1}{2}x + b = 0 \iff x_N = -2b$; $N(-2b/0)$

z.B für $b = -2$: $N(-2 \cdot (-2) \mid 0) = N(4/0)$

1.4 $b \to \infty$: NST $\to$ links $(-\infty)$; $S_y \to$ oben $(+\infty)$

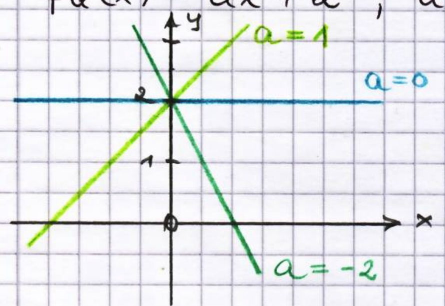
1.5 $A(\overset{x}{4} \mid \overset{y}{3})$ in $y_A = \frac{1}{2}x_A + b \iff 3 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b \iff b = 1$ (s.o)

$B(\overset{x}{-\frac{7}{3}} \mid \overset{y}{\frac{1}{5}})$: $\frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{7}{3}) + b \iff b = \frac{41}{30} = 1{,}3\overline{6}$

---

2. $f_a(x) = ax + 2 \; ; \; a \in \mathbb{R} \; ; \; D = \mathbb{R}$

2.1



2.2

Gemeinsam : y-Achsen-Abschn.

Unterschied : Steigung

Gemeinsam : Punkt B(0|2)

"Geradenbüschel durch B"

2.3 • $S_y(0|2)$ unabhängig vom Parameter (Param. kommt nicht mehr vor)

• NST : $ax + 2 = 0$

$\iff ax = -2 \; | : a$ Achtung! a könnte Null sein

$\Rightarrow$ Fallunterscheidung erforderlich!

a=0 in letzte Gleichung

<u>1. Fall</u> : $a = 0$

$0 \cdot x = -2$

$\iff 0 = -2 \; (f)$

<u>2. Fall</u> : $a \neq 0$

$x = -\frac{2}{a}$; $N(-\frac{2}{a} \mid 0)$

$\Rightarrow$ Für $a = 0$ gibt es keine NST (vgl. Graph!)

LINEARE FUEN MIT PARAMETER

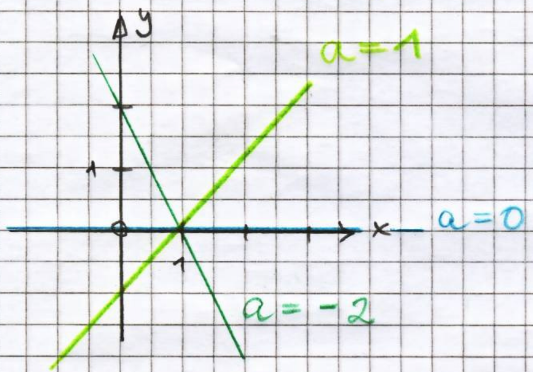
2.4 Für $a \to \infty$: $S_y(0/2)$ bleibt unverändert (unabh. v. Param.)
$N(-\frac{2}{a}/0) \to 0^-$ von "negativen Seite kommend";

2.5 $A(1/4)$: $4 = a \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow a = 2$ und $f_2(x) = 2x + 2$
$B(0/2)$: $2 = a \cdot 0 + 2 \Leftrightarrow 2 = 2$ (w) unabh. vom Param.
d. h. <u>alle</u> Geraden laufen durch B (Büschelpkt)

---

3 $f_a(x) = ax - a$; $a \in \mathbb{R}$

3.1



3.2 • $S_y(0/-a)$
• NST : $ax - a = 0 \Leftrightarrow ax = a \;|\; : a$
1. Fall $a = 0$: $0 = 0$ (w) ; ∞ viele NST (siehe Graph)
2. Fall $a \neq 0$: $x = \frac{a}{a} = 1$; $N(1/0)$ unabh. v. Param. (Büschelpunkt)

3.3 Geradenbüschel durch $N(1/0)$

3.4 $A(1/4)$: $4 = a \cdot 1 - a \Leftrightarrow 4 = 0$ (f) ; keine Gerade läuft durch A
A liegt oberhalb des Büschelpunktes
Nur eine senkrechte Gerade könnte durch A und $N(1/0)$ laufen, aber das ist <u>nicht der Graph einer Funktion</u>

$B(-3/-2)$: $-2 = a \cdot (-3) + a \Leftrightarrow -2 = -a \Leftrightarrow a = -1$
$f_{-1}(x) = -x + 1$

4 a) $S_y(0|-2)$

$kx - 2 = 0$

$\Leftrightarrow kx = 2 \quad |:k$

1. Fall $k=0$

$0 \cdot x = 2$ (f)

keine NST

$f_0(x) = -2 \quad \parallel x$-Achse

2. Fall $k \neq 0$

$N(\frac{2}{k}|0)$

b) $S_y(0|6k)$

$3x - 6k = 0$

$\Leftrightarrow 3x = 6k$

$x = \frac{6k}{3} = 2k$

$N(2k|0)$

(Parallelenschar mit $m=3$

4 c) $S_y(0|-6k^2)$

$3kx - 6k^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3kx = 6k^2 \quad |:3k$

1. Fall; $k=0$

$0 = 0$ (w);

∞ viele NST

$f_0(x) = 0$

2. Fall $k \neq 0$

$x = \frac{6k^2}{3k} = 2k$

$N(2k|0)$

d) $S_y(0|4-k^2)$

$(2-k)x = k^2 - 4 \quad |:(2-k)$

1. Fall: $2-k=0 \Leftrightarrow k=2$

$0 \cdot x = 0$ (w)

∞ viele NST

2. Fall: $k \neq 2$

$x = \frac{k^2-4}{2-k} = \frac{(k+2)(k-2)}{-(k-2)}$

$x = -(k+2)$

$N(-k-2|0)$

e) $(k^2 + 2k + 1)x = k^2 - 1$

$(k+1)^2 x = k^2 - 1 \quad |:(k+1)^2$

1. Fall: $k+1 = 0 \Leftrightarrow k = -1$

$0x = 0$ (w)

$\rightarrow \infty$ viele NST

2. Fall: $k \neq -1$

$x = \frac{k^2-1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)(k-1)}{(k+1)(k+1)} = \frac{k-1}{k+1}$

$N(\frac{k-1}{k+1}|0)$

5a) $x + 3k = 4x - 6$

$\Leftrightarrow -3x = -3k - 6$

$\Leftrightarrow x = k + 2$

$f_k(x) = k + 2 + 3k = 4k + 2$

$g_k(x) = 4(k+2) = 4k + 2$

$S(k+2 \mid 4k+2)$

5b) $kx + 2 = 4x - 2$

$\Leftrightarrow (k-4)x = -4$

1. Fall: $k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = 4$

$0 = -4$ (f) $\Rightarrow$ k. SP,

2. Fall: $k \neq 4$ $f_4(x) = 4x + 2$

$x = \frac{-4}{k-4} = \frac{4}{4-k}$

$f_k(x) = \frac{4k}{4-k} + 2 = \frac{4k}{4-k} + \frac{2(4-k)}{4-k}$

$= \frac{4k + 8 - 2k}{4-k} = \frac{2k+8}{4-k}$

$g_k(x) = \frac{16}{4-k} - \frac{2(4-k)}{4-k} =$

$\frac{16 - 8 + 2k}{4-k} = \frac{2k+8}{4-k}$

$S\left(\frac{4}{4-k} \,\middle|\, \frac{2k+8}{4-k}\right)$

5c) $kx + 6 = 4x + 6$

$\Leftrightarrow (k-4)x = 0$

1. Fall: $k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = 4$

$0 = 0$ (w) ; ∞ viele SP

$f_4(x) = 4x + 6 = g(x)$

2. Fall: $k \neq 4$

$x = 0$; $y = 6$; $S(0 \mid 6)$

G_{f_k}: Büschel durch $(0 \mid 6)$

5d) $3kx - 2k = 5x + 1$

$\Leftrightarrow (3k - 5)x = 2k + 1$

1. Fall: $3k - 5 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{5}{3}$

$0 = 2 \cdot \frac{5}{3} + 1$ (f) $\Rightarrow$ k. SP

$f_{5/3}(x) = 3 \cdot \frac{5}{3}x - 2 \cdot \frac{5}{3} = 5x - \frac{10}{3}$

2. Fall: $k \neq \frac{5}{3}$

$x = \frac{2k-1}{3k-5}$

$\dot{g}(x) = \frac{10k - 5}{3k-5} + \frac{3k-5}{3k-5}$

$= \frac{13k - 10}{3k - 5}$

$S\left(\frac{2k-1}{3k-5} \,\middle|\, \frac{13k-10}{3k-5}\right)$

Lineare Fuen m. Param. Aufg. 5

5e) $8kx + 4k = 8x + 4 \quad |:4$

$\Leftrightarrow 2kx + k = 2x + 1$

$\Leftrightarrow (2k - 2)x = 1 - k$

<u>1. Fall</u>: $2k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

$0 = 0$ (w) $\Rightarrow \infty$ viele SP.

$f_1(x) = 8 \cdot 1x + 4 \cdot 1 = g(x)$

<u>2. Fall</u>: $k \neq 1$

$x = \frac{1-k}{2k-2} = \frac{1-k}{-2(1-k)} = -\frac{1}{2}$

$g(-\frac{1}{2}) = -8 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 0 \quad S(-\frac{1}{2}|0)$

$f_k(x) = 8k(x + \frac{1}{2})$ Büschel

5f) $3kx + 3 = 4x - 3$ (vgl. 5b)

<u>1. Fall</u> $k = \frac{4}{3}$

$0 = -6$; keine SP.

$f_{4/3}(x) = 3 \cdot \frac{4}{3}x + 3$

<u>2. Fall</u> $k \neq \frac{4}{3}$

$x = \frac{-6}{3k-4} = \frac{6}{4-3k}$

$S\left(\frac{6}{4-3k} \middle| \frac{12+9k}{4-3k}\right)$

5g) $kx + 2 = ax + 3 \Leftrightarrow (k-a)x = 1$

<u>1. Fall</u>: $k - a = 0 \Leftrightarrow k = a$

$0 = 1$ (f), k. SP.

$f_{k=a}(x) = ax + 2$

<u>2. Fall</u>: $k \neq a$

$S\left(\frac{1}{k-a} \middle| \frac{3k-2a}{k-a}\right)$

NR: $g_a\left(\frac{1}{k-a}\right) \stackrel{?}{=} f_k\left(\frac{1}{k-a}\right)$

5h) $kx + 1 = x + a$

$\Leftrightarrow (k-1)x = a - 1$

<u>1. Fall</u>: $k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

$0 = a - 1$

<u>1.1. Fall</u> $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

$0 = 0$ (w) $\rightarrow \infty$ viele SP;

$f_{k=1}(x) = g_{a=1}(x)$

<u>1.2. Fall</u> $a \neq 1$

$0 = a - 1$ (f); k. SP.

<u>2. Fall</u>: $k \neq 1$

$x = \frac{a-1}{k-1}$; $S\left(\frac{a-1}{k-1} \middle| \frac{ka-1}{k-1}\right)$

5i) $kx + 6 = ax + 6 \Leftrightarrow (k-a)x = 0$

<u>1. Fall</u>: $k - a = 0 \Leftrightarrow k = a$

$0 = 0$ (w), Ger. identisch

<u>2. Fall</u>: $k \neq a$

$x = \frac{0}{k-a} = 0$; $S(0/6)$

(Beides Büschel!)

5k) $kx + 6 = ax + 3a \Leftrightarrow (k-a)x = 3a - 6$

<u>1 Fall</u>: $k = a$

$0 = 3a - 6$

<u>1.1. Fall</u>: $3a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

$0 = 0$ (w) $\Rightarrow \infty$ viele SP

<u>1.2. Fall</u>

$0 = 3a - 6$ (f) $\Rightarrow$ k. SP.

<u>2. Fall</u>: $k \neq a$

$S\left(\frac{3a-6}{k-a} \middle| \frac{3ka - 6k + 18a - 36}{k-a}\right)$

Lineare Fuen m. Param.   Aufg 7

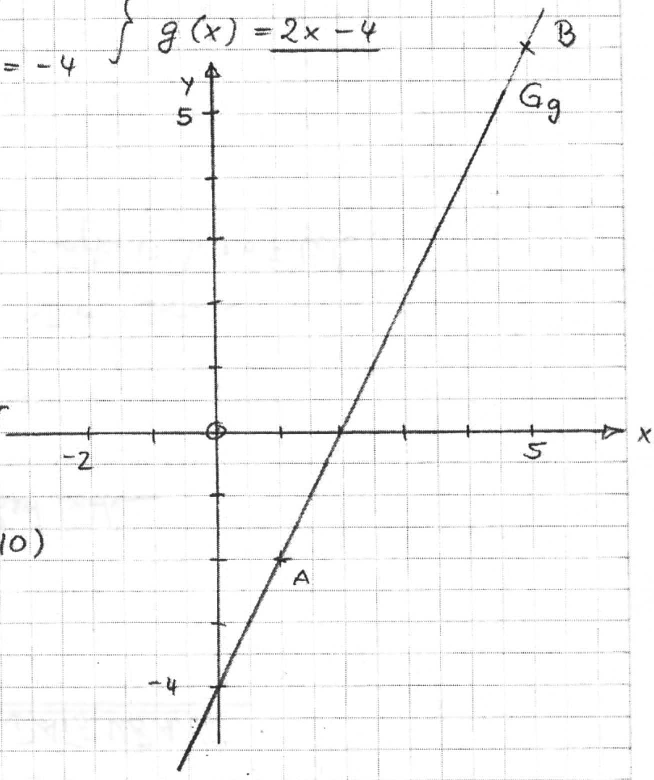
(7.0) Geg: $A(\underset{x}{1}|\underset{y}{-2})$; $B(\underset{x}{5}|\underset{y}{6})$; $f_k(x) = kx + 2k$

(7.1)

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6+2}{5-1} = \frac{8}{4} = 2$$

$$t = y_B - m x_B = 6 - 2 \cdot 5 = -4$$

$\left.\right\}$ $\underline{g(x) = 2x - 4}$



(7.2) $S_y(0|2k)$

$kx + 2k = 0$

$\Leftrightarrow kx = -2k$

1. Fall: $k = 0$

$0 = 0$ (w) ; ∞ viele NST

2. Fall: $k \neq 0$

$x = -\frac{2k}{k} = -2$; $N(-2|0)$

(7.3) $kx + 2k = 2x - 4$

$\Leftrightarrow (k-2)x = -4 - 2k$

1. Fall: $k = 2$

$0 = -4 - 4$ (f)

$\Rightarrow$ keine SP

2. Fall: $k \neq 2$

$$x = \frac{-4-2k}{k-2}$$

$$y = 2 \cdot \frac{-4-2k}{k-2} - 4$$

$$= \frac{-8 - 4k - 4(k-2)}{k-2}$$

$$= \frac{-8k}{k-2} \Rightarrow \underline{S\left(\frac{-4-2k}{k-2} \middle| \frac{-8k}{k-2}\right)}$$

$$= \frac{8k}{2-k}$$

(7.4) $P(\underset{x}{3}|\underset{y}{-2{,}5})$

$-2{,}5 = 3k + 2k$

$-2{,}5 = 5k$

$$\underline{\underline{k = -\frac{1}{2}}}$$

(7.5)

$\underline{\underline{f_k(x) = k(x-1) - 2}}$

$= kx - k - 2$

$-2 = -2k + 2k$ (f) ↯

$\Rightarrow$ A ober. Bü. pu.